Texte de la 180e conférence de l'Université de tous les savoirs donnée le 28 juin 2000.

L'anneau fractal de l'art à l'art à travers la géométrie, la finance et les sciences
par Benoît Mandelbrot

La géométrie fractale n'est pas vieille, puisque je n'en ai eu l'idée que peu avant 1975. Son domaine s'étendant et les résistances s'effaçant, on voit que l'idée sous-jacente vient spontanément aux humains, et qu'une intuition de la fractalité a fait partie du patrimoine de l'humanité, en Afrique et en Asie autant qu'en Europe.

On pense aux sorciers et fées quand une idée en apparence insignifiante se met soudain à déverser des conséquences variées et importantes. Pour introduire et faire comprendre les fractales, demandons-nous donc si un objet géométrique peut prendre la même forme, qu'on l'examine de près ou de loin. Cette propriété fut récemment baptisée auto-similarité. Elle semble d'une parfaite insipidité, mais c'est la graine d'une floraison de développements constituant toute une géométrie. Insipidité est également le terme approprié pour dénoter la droite et le plan idéaux, qui sont des exemples d'auto-similarité connus de tout le monde. En revanche, la sphère n'est pas auto-similaire ; quand on la regarde de près, en étant dessus, elle parait plate ; de loin, comme tout objet borne, elle parait ponctuelle.

Il y a cent ans, de 1875 a 1925, des mathématiciennes perspicaces prirent conscience d'une poignée de curiosités ou monstres, objets qu'ils présentèrent comme nouveaux, sans contrepartie dans la nature et contredisant l'intuition géométrique. Certains de ces objets étaient auto-similaires, car cette qualité les rendait plus faciles à décrire. Beaucoup plus tard, j'allais les séparer des autres curiosités en question, vouer ma vie scientifique à leur étude, et les baptiser de « fractales ». On en voit un exemple dans la partie « géométrique » de l'illustration qui accompagne ce texte. Cette chronique brossera a grands traits chacune de trois grandes étapes récentes de l'étude des fractales.

En premier lieu, surprise absolue et le plus grand bonheur intellectuel de ma vie, je reconnus a ces monstres un autre rôle tout a fait nouveau. On les qualifiait imprudemment d' « exceptionnels ». Je montrai, tout au contraire, que la fractalité n'est pas loin d'être la règle dans la nature. Selon le cas, elle ne concerne que des détails ou touche a l'essentiel.

Cette thèse osée et interdisciplinaire provoquant l'incrédulité, il faut la préciser et la rendre « naturelle ». Le point essentiel est que la droite et le plan sont parfaitement lisses, mais en règle presque générale les choses sont loin de cet idéal : non pas lisses mais rugueuses dans le détail ou dans l'essentiel.

Songeons maintenant a l'ensemble des messages que nous recevons de nos sens. Ceux de la vue et l'ouie, considérés comme raffines, se trouvent également avoir été le plus tôt et le mieux explores ; c'est peut-être une façon de constater qu'ils étaient (très relativement parlant !) les plus faciles a explorer.

À l'autre extrême, le sens du lisse ou du rugueux restait en dehors des sciences. Il appartenait au monde de la mécanique pratique des frottements dont les ingénieurs cherchent à se débarrasser. Il semblait impossible d'en extirper un quelconque concept. Les questions que posait la rugosité n'étaient pas sottes, mais inabordables. Faute de mieux, elles ne recevaient que des réponses évasives et inadéquates. Par exemple, songez donc aux questions incontournables que voici :

« Comment mesurer la rugosité ou volatilité des chroniques boursières, ne serait-ce que pour pouvoir évaluer les risques financiers de façon réaliste ? »

« Comment mesurer la cote de la Bretagne ? »

« Comment caractériser la forme d'une cote, d'une rivière, d'une ligne de partage des eaux, ou de la frontière d'un bassin d'attraction dans le contexte de l'hydraulique, mais aussi des systèmes dynamiques ? »

« Comment définir la vitesse du vent en plein orage ? »

« Comment mesurer et comparer les rugosités d'objets communs, tels qu'une pierre cassée, un talus, une montagne, ou un bout de fer rouille ? »

« Quelle est la forme d'un nuage, d'une flamme ou d'une soudure ? »

« Quelle est la densité des galaxies dans l'Univers ? »

« Comment varie l'activité sur le réseau Internet ? »

À toutes ces questions (ou fragments de questions) c'est la géométrie fractale (continuée par la multifractale) qui allaient apporter les premières réponses satisfaisantes. Dans chaque cas, les réponses se fondent sur la qualité - elle-même surprenante - que la rugosité se trouve souvent être fractale. Dans beaucoup de phénomènes naturels ou créations de l'Homme (telles que la Bourse ou l'Internet), ceci permit a la géométrie fractale de devenir la rampe de lancement de la première théorie du rugueux « simple ».

Pour résumer, et apaiser toute inquiétude que les fractales auraient pu susciter, cette nouvelle géométrie, je la fis naître de l'union entre une certaine mathématique ésotérique et le plus grossier de nos sens. Elle dura, fructifia, s'imposa et ne manquera jamais de problèmes a traiter. De plus, son domaine s'étendit, d'abord a l'aval puis a l'amont de mes travaux scientifiques.

À l'aval, elle conduisit a un deuxième étonnement absolu, cette fois esthétique. Les nouvelles images fractales, fruits sans nombre de ce qui avait d'abord paru une mésalliance, et dont l'accouchement se fit dans un centre informatique, furent de plus en plus largement perçues comme belles ou tout au moins hautement décoratives. L'ensemble de Mandelbrot vient inévitablement a l'esprit. Une formule ancienne, paraissant d'une parfaite insipidité, se révéla la source d'images fantastiques qu'on voit désormais partout, a tel point qu'elles se fondent dans l'univers visuel de l'humanité. Elles ne vont pas subir le sort commun des modes. Selon la belle expression de mon ami, le regrette Marcel-Paul Schutzenberger, elles marquent un nouveau style.

L'aval de la géométrie fractale s'ajoutant désormais a son étrange interdisciplinarité, l'incrédulité renaît sous une forme plus forte encore. La géométrie fractale jouant a la fois tant de rôles divers, comment se fait-il qu'elle n'ait que vingt-cinq ans d'age ? Que les premières « protofractales » n'en aient que cent ?

Avoir déclenché tout cela (la chance d'être l'homme qu'il fallait, quand il fallait et ou il fallait) est un privilège merveilleux qui doit être accepté avec humilité. Des mon livre de 1975, et surtout le livre anglais de 1982, la géométrie fractale s'est littéralement et tout a fait spontanément envolée. Mais je n'ai jamais eu la présomption d'avoir « inventé » tout ceci ex nihilo. Tout au contraire, je cherchais des précurseurs (Gustave Eiffel ?) dont je me plaisais a citer des phrases sans suite, mais parmi eux aucun ne pouvait être perçu comme ultime « inventeur ». Quelle corde sensible de l'humanité avait-elle donc attendu que je la fasse résonner ?

Résolvant ce grand mystère, une troisième surprise apparut et se plaça a l'amont de mes travaux. Mes ouvrages me valurent beaucoup de lecteurs de tous bords et un courrier abondant plein de variété et d'enseignements. Voici ce qui en ressort. Dans l'histoire des fractales, la période 1875-1925 reste un moment fort, spécialisé et trompeur. Mais il semble bien que l'on ne puisse identifier quelque commencement que ce soit.

Précisons que les fractales sont des formes telles que, indépendamment des sens que l'on donne aux mots, le détail reproduit la partie et la partie reproduit le tout. Pour s'en assurer, divers procédés commencent par tracer les grandes lignes d'une figure, puis utilisent un générateur pour ajouter des détails de plus en plus petits. Il est donc essentiel d'avoir une progression sans fin, idée familière aux théologiens. Dans le Bouddhisme Zen, on trouve le thème (repris par Leibniz) de la goutte de rosée dans laquelle est incluse en miniature tout une réplique du monde, y compris des gouttes de rosée et ainsi de suite a l'infini. Cette théologie de la goutte d'eau trouve un écho dans de nombreuses Mandalas tibétaines, avec leur Bouddhas de toutes tailles, et on l'aperçoit aussi dans la Grande Vague du peintre Hokusai.

Pour changer de continent et de métier, le thème du générateur répété se trouve dans l'univers de Kant (fait de galaxies groupées en amas, super amas et ainsi de suite sans fin), dans les célèbres dessins de « fontaines » de Leonard de Vinci, avec leurs tourbillons superposes, dans l'Ange de Gustave Dore, fait d'anges plus petits, sans parler du visage de la mort de Salvador Dali.

Pour changer encore de continent, on nous a récemment appris que l'art de nombreuses nations africaines regorge de fractales d'une subtilité pleine de signification car objets de tradition.

Passant aux écrits de peintres, quoi de plus beau que ces mots d'Eugène Delacroix :"Swedenborg prétend, dans sa théorie de la nature,... que les poumons se composent d'un nombre de petits poumons, le foie de petits foies, la rate de petites rates, etc.

« Sans être un aussi grand observateur, je me suis aperçu, il y a longtemps de cette vérité : j'ai dit souvent que les branches de l'arbre étaient elles-mêmes de petits arbres complets ; des fragments de rochers sont semblables a des masses de rochers, des particules de terre a des amas énormes de terre. Je suis persuade qu'on trouverait en quantité de ces analogies. Une plume est composée d'un million de plumes. »

Arrêtons-nous sur Swedenborg, dont les mots allaient être cites par Emerson. Il ne brillait pas par ses connaissances en biologie mais son intuition que le monde est ainsi fait partait d'observations authentiques. C'est ainsi que Delaroix aurait moins fait tiquer s'il avait choisi le chou-fleur. Il ne s'agit donc pas ici de validité scientifique ; cependant son opinion fausse mérite d'être citées, car elle attire l'attention sur un fait patent : l'idée d'emboîtement auto-similaire vient spontanément aux humains, et l'intuition de fractalité a toujours fait partie du patrimoine de l'humanité, en Asie et en Afrique aussi bien qu'en Europe.

Un bipède sans plumes n'est devenu homme qu'après avoir conquis le feu et les condiments et avoir décoré son corps, sa demeure et son temple. Au cours des millénaires, ses motifs décoratifs s'affinèrent.

Certains - bâtisses, broches et colliers - aidèrent à la naissance de la géométrie qui allait être codifiée par Euclide et beaucoup plus tard devenir l'outil essentiel de maintes sciences.

D'autres éléments décoratifs furent laisses de cote, puis se déguisèrent pour participer à une révolution anti-euclidienne en mathématiques et enfin donnèrent une forme a des objets que la vieille géométrie et les sciences étaient forces de laisser de cote comme « amorphes », c'est-à-dire sans aucune forme qui aurait permis l'analyse de la nature et sa synthèse.

Ayant ainsi traverse et assiste plusieurs territoires du savoir désintéressé ou pratique, avec des pointes vers les arts, l'aval et l'amont de l'œuvre d'une vie viennent de se refermer devant nos yeux en un anneau fractal. Parti il y a très très longtemps de l'art, un long périple confus est désormais revenu a son origine.

fig.1. Le chou-fleur et le concept d'auto-similarité

S'il n'existait pas dans la nature, le chou-fleur variété *romanesco* aurait du être inventé par un fractaliste. Parmi les objets de tous les jours, c'est la meilleure illustration qui soit du concept de surface rugueuse mais riche en invariances.

Le chou-fleur qu'on récolte entier est fait d'inflorescences dont chacune est un petit chou-fleur, lui-même subdivisé en choux-fleurs encore plus petits, et ainsi de suite. On peut suivre la subdivision à l'œil nu , puis à la loupe, et au microscope. Le concept ainsi illustré est une invariance appelée auto-similarité, dont une généralisation caractérise les fractales. Le brocoli aidant, on peut imaginer que, implicitement, ce concept remonte au Déluge. Cependant, ce n'est que récemment qu'il n'a été formalisé et ses conséquences n'ont été explorées.

La valeur gastronomique du chou-fleur se mesure aux poids et volume, mais combien donc mesure sa surface ? Ceci rappelle une question déjà classique : « Combien mesure la côte de la Bretagne ? », avec une nuance de plus.

Les bifurcations des tiges conservent en gros l'aire de la section transversale. Mais si on remonte en partant de la racine, ladite section s'éparpille en boucles de plus en plus nombreuses et de plus en plus petites. Donc le périmètre de la section ne cesse d'augmenter. Et de même, le périmètre total des tiges ne cesse d'augmenter quand on s'approche de leurs pointes. En théorie, il devient infini, en pratique il dépend de la finesse de l'analyse.

Autre thème fractal : si le chou-fleur bien tasse ne laisse pas la pluie passer entre les inflorescences, on peut distinguer au sein de la surface totale la partie sur laquelle il pleut. L'aire de cette dernière est infinie, elle aussi, mais (pour paraphraser George Orwell), l'est moins que l'est la surface totale.

Quand j'étais étudiant, les mathématiciens enseignaient que les surfaces d'aire infinie étaient leur invention. Voire ! Il semblait plutôt que c'étaient les plans et les sphères qui avaient été inventés par des artisans de toute sorte. La nature, elle, nous offre moins peu de sphères et beaucoup d'objets rugueux , y compris diverses arborescences : les arbres , ainsi que les intérieurs des poumons, des reins et du foie. Rien de surprenant a tout cela : ces arborescences résultent de bourgeonnements successifs, et l'auto-similarité suggère de la part de la nature une économie de moyens qui est remarquable mais … « naturelle ».

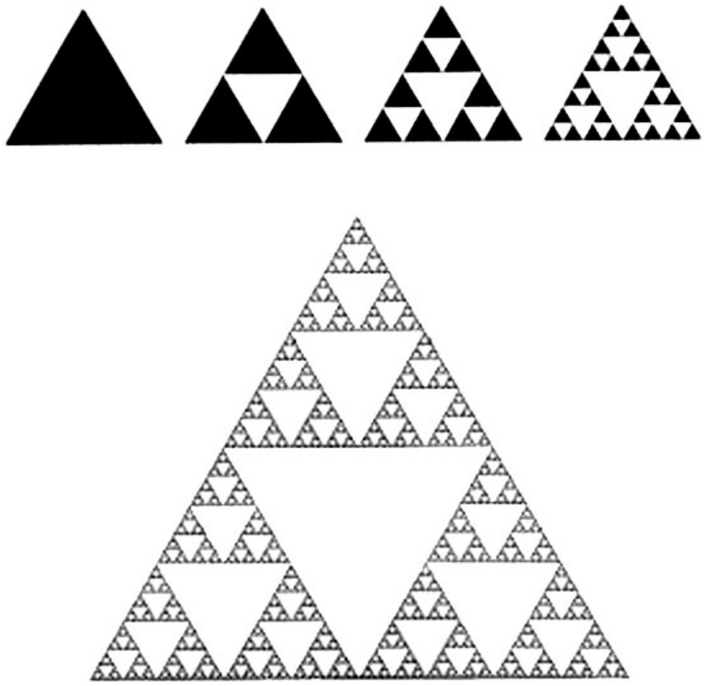


fig.2 Poupées prismatiques et une fractale ramifiée

Il n'existe aucun rapport entre les fractales et les « poupées russes » qui s'emboîtent en gigogne, de façon que chacune en contienne une plus petite. La plus menue l'est autant que le permettent l'habileté et la sécurité du propriétaire. Si la matière avait été continue, on aurait pu imaginer des poupées convergeant par approximations successives vers un point isolé. Les mathématiciens aiment penser à un point comme la limite de domaines emboîtes de plus en plus petits : les poupées russes n'apportent donc rien de nouveau a la notion.

Pour passer aux fractales, supposons que chaque poupée en contienne, non pas une, mais trois. Pour simplifier, donnons leur la forme de prismes de hauteur fixe et dont les bases sont des triangles équilatéraux. La base de la grande poupée est le petit diagramme à gauche. On y emboîtera trois poupées, chacune deux fois plus fine, comme dans le deuxième diagramme. Appelons-les H (en haut), G (à gauche), et D (à droite). Puis on recommencera, obtenant 9 et 27 poupées, et ainsi de suite. Deux suites différentes de longueur 5, écrites avec des lettres H,G et D définissent des poupées différentes du cinquième ordre. Tout discours infiniment long forme des lettres H,G et D, et définit une poupée filiforme. À la limite, les bases de ces poupées se fondent en une courbe faite d'une infinité de boucles, auto-similaire, donc fractale. Cette courbe a une longue histoire en décoration, mais j'ai trouve amusant de l'appeler « tamis de Sierpinsky ». L'idée était familière à Salvador Dali, dont on connaît la peinture du visage de la Mort.

Un dessin moins amusant serre non plus trois, mais quatre poupées prismatiques : la poupée prismatique initiale se remplissant complètement. Avec seulement les deux poupées G et D, la limite se réduirait au cote le plus bas de la poupée la plus grande. Donc on peut considérer le tamis comme une « chimère » contenue entre le point (dimension 1) et le triangle (dimension 2). On a des bonnes raisons de dire que la dimension fractale du tamis est 1,5849 ; c'est le rapport des logarithmes de 3 (nombre de poupées) et de 2 (rapport de réduction d'une poupée a ses composantes).

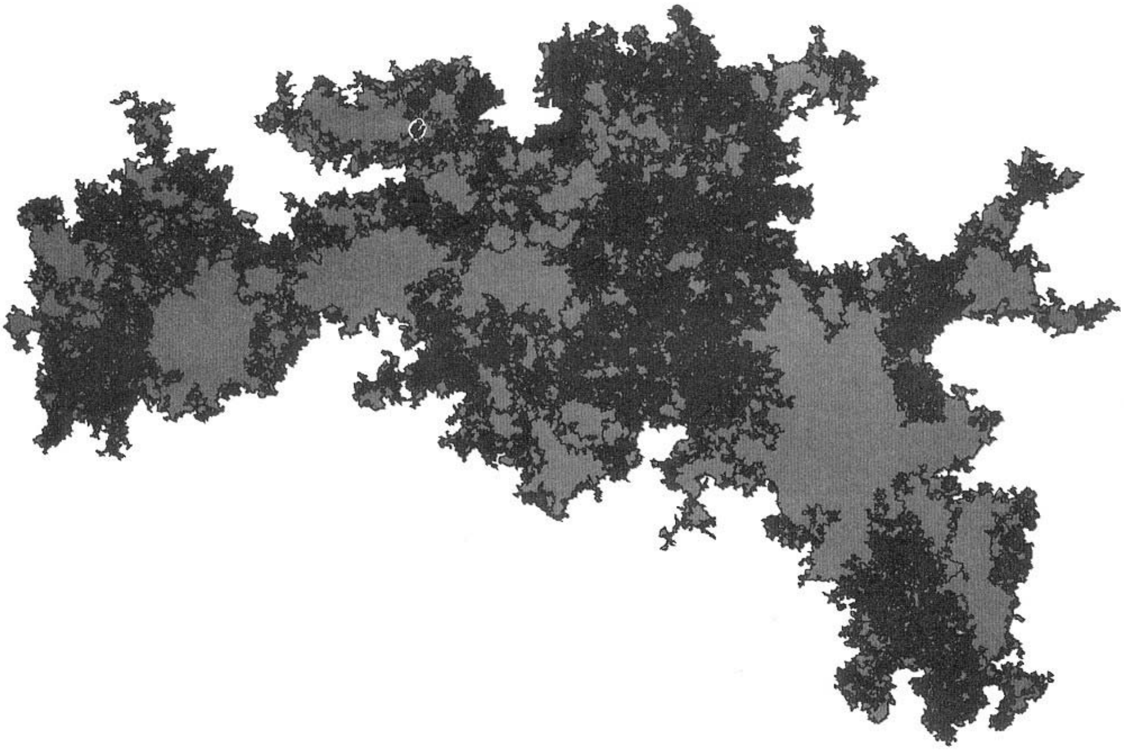


fig.3 L' amas brownien ou île de l'ivrogne

L'ivrogne, ayant perdu sa clef, part au hasard à sa recherche. Sans jamais se rappeler d'où il vient, il « randonne », puis, miracle, la retrouve. Le chemin qu'il a parcouru est représenté par un gribouillis qui, tel quel, n'aurait rien dit d'intéressant à personne. Pour pouvoir réellement examiner sa structure, j'ai fait que les points qu'il a contourné sans les traverser soient colorés en gris. Ainsi assisté, le gribouillis se transforme soudain en une île dont la côte serait aussi rugueuse dans le petit que dans le très petit, donc fractale. C'est d'ailleurs le moyen le plus simple qui soit pour construire un exemple d'une telle côte. Notons aussi que les cotes des îles géographiques sont fractales **(figure 5)**. Ayant pris l'habitude de les examiner et d'estimer à l'œil les dimensions fractales qui en mesurent la rugosité, j'ai aussitôt pensé à la dimension 4/3. Puis je l'ai vérifiée numériquement et l'ai formalisé en une conjecture mathématique. Vingt ans plus tard, couronnant maints efforts héroïques, dont ceux de B. Duplantier, la preuve vient d'être donnée par G.W. Lawler, O. Schram et W. Werner. L'œil serait-il en train de reprendre son vieux rôle stimulant en mathématiques dites pures ?

fig. 4 Les coraux fractals de l'ADL

Imaginons que des cellules de corail cherchent à s'attacher à un corail déjà établi, mais soient réduites pour ce faire à effectuer une randonnée d'ivrogne. C'est à cela que revient un processus physique que suggéra à T. Witten et L. Sander le problème des dépôts de carbone dans les moteurs diesel. Ce processus parait insipide, mais à la surprise générale son BUG s'avéra, à l'ordinateur, être d'une complexité magique. Une fois de plus, le très simple engendre le très complexe. Ces dendrites dites d'ADL ont beaucoup appris aux sciences en unifiant d'innombrables configurations disparates. Mais les efforts des meilleurs mathématiciens et physiciens n'ont pas encore réussi à les dominer. Les grandes conjectures ne cessent de s'améliorer avec l'âge.

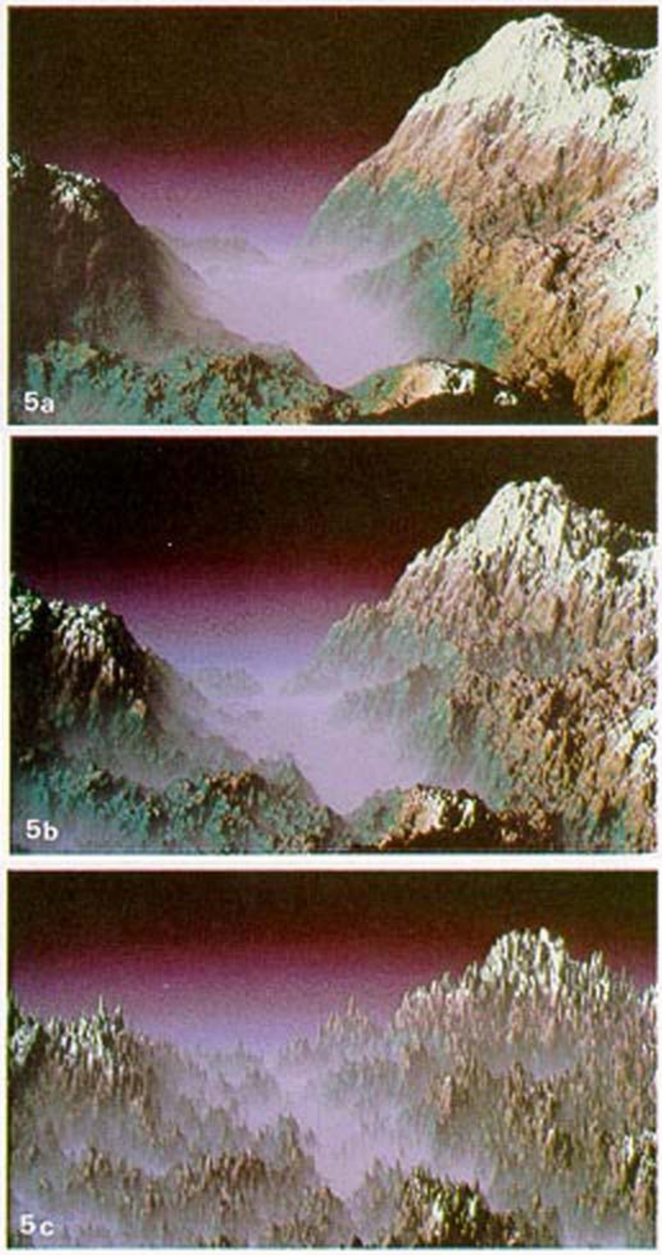
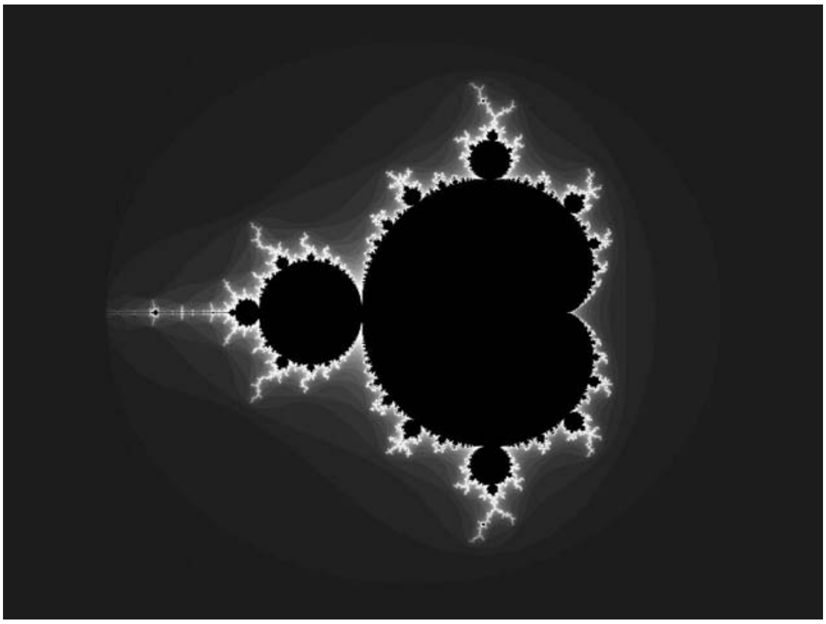


fig. 5 Montagnes fractales de nulle part et mesure numérique de la rugosité

L'homme qui a « vaincu » le Mont Cernin, Edward Whymper, allait observer que les fragments de roche ressemblent aux structures dont on les avait détachés, les mêmes forces donnant leur forme au tout et aux parties. L'observation doit remonter au Déluge et bien avant qu'on me fasse connaître Whymper, je l'ai exprimée, en ajoutant aussi peu du mien que possible, en une formule très simple, directement programmable sur ordinateur. Voici trois reliefs fractals tout à fait synthétiques dus à R.F. Voss. Ils proviennent de la même formule générale, mais diffèrent par la valeur d'un paramètre. De haut en bas, la fameuse dimension fractale est 2,2, 2,3, et 2,8. Or ils sont perçus comme étant de rugosités différentes. La comparaison démontre que ledit paramètre trouve dans l'ésotérique mathématique, est une première mesure intrinsèque de la rugosité . Avant la géométrie fractale, cette notion très naturelle était impossible à mesurer.



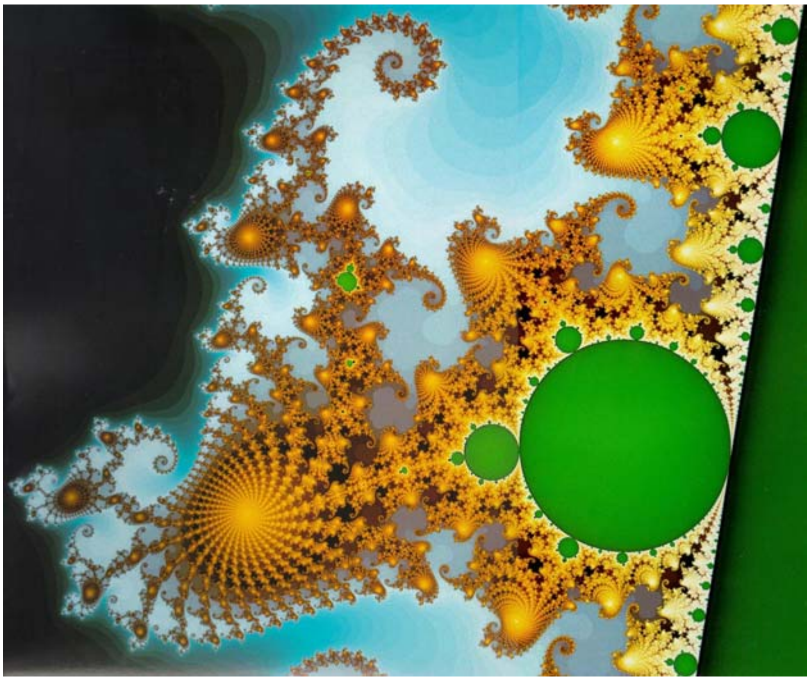


fig. 6 L'ensemble de Mandelbrot serait-il l'objet mathématique le plus complexe qui soit ?

L'affirmation dans le titre est bien vraie quand on essaie de faire la liste de ses propriétés innombrables et étonnantes. Mais « complexité » est une notion que nul n'a vraiment réussi à mesurer. Et la « clef » qui suffit pour nous livrer l'ensemble de Mandelbrot est, tout au contraire, d'une simplicité spartiate. Un seul petit pas mène de l'insipide au magique. Dans la formule-clef, l'ingrédient actif (comme disent les médecins) est la petite formule z.z + c. Pour le numérophobe, seule compte sa brièveté. Mais tous les programmeurs savent aujourd'hui ce que veut dire l'itération à partir de c = 0. Partant d'un nombre complexe, c'est-à-dire d'un point c (on ne perd rien en prenant c dans un cercle de rayon 2 autour de l'origine) on forme c, puis c.c + c, puis (c.c + c) . (c.c + c) + c, etc. Au bout de (disons) 1 000 répétitions, on vérifie si l'on n'est pas encore sorti d'un cercle de rayon (disons) 10. Si tel est le cas, on a établi que c se situe dans l'ensemble de Mandelbrot.

En 1979-80, j'ai parcouru cet ensemble sur ordinateur, l'examinant avec passion et toute l'intensité que permettaient les moyens primitifs de l'époque. Je constatai divers « faits » expérimentaux que je traduisis en conjectures mathématiques. L'un fut démontré en six mois par A. Douady et J. Hubbard qui ont donné mon nom audit ensemble. D'autres ont pris cinq et dix ans, et ma première observation est devenue une conjecture mathématique célèbre. Elle est là, beaucoup ont tenter de l'escalader et nul n'a encore réussi.

Des hommes se comptant peut-être déjà en millions ont désormais répété cette même démarche et remplissent Internet d'images de « mon ensemble ». À la stupéfaction initiale succède toujours la soif irrésistible d'en voir et savoir plus. Puis la satiété vient et apporte une impression curieuse du « déjà vu ».

L'origine technique de cet ensemble parait désormais moins importante que son pouvoir magique (le terme est inévitable) d'avoir identifie et de faire résonner une certaine corde sensible commune à l'humanité.

Références bibliographiques :

- Les objets fractals: forme, hasard et dimension, 4ème édition, Paris, Flammarion (Collection Champs), 1995.
- Fractales, hasard et finance, Paris, Flammarion (Collection Champs), 1997.
- The Fractal Geometry of Nature, New York, W.H. Freeman and Company, 1982.
- Fractals and Scaling in Finance, Discontinuity, Concentration, Risk, New York, Springer, 1997.
- Multifractals and 1/f Noise, Wild Self-affinity in Physics, New York, Springer. 1999.
- Gaussian Self-Affinity and Fractals: Globality, the Earth, 1/f, and R/S. New York, Springer, 2000.